数理解析研究所講究録
700巻 1989年 85-102

Affine Lie環の表現論とRiemann面上のConformal field theory

名大 理数 土屋 昭博 (Akihiro Tsuchiya)
KEK 山田 泰彦 (Yasuhiko Yamada)

§1. Introduction

ここでの目的は、Affine Lie環のintegrable表現論に基づくconformal field theory (物理ではWZW-modelと呼ばれている理論)を任意のRiemann面上(stable curveも含めて)で、operator形式で展開することである。話の背影には、rational conformal field theory (RCFT)に関する最近の進展があり、ここで上記のmodelをとり上げたのも、その典型例としての興味からである。話はWZW-model (特に$A_1^{(1)}$-type)を中心に進めるが、一般のRCFTに共通の性質についてはそのつどcommentする。なお、本稿では、多少一般性や厳密さに欠くことがあっても、わかりやすいことを第一の目標とし、文献[1]とは相補的となるように心がけた。

§2. Affine Lie 環 と Virasoro algebra

Conformal field theory は conformal 変換 $z \mapsto z+\epsilon_n z^{n+1}, n\in\mathbb{Z}$ の下で不変な場の理論であって、対応する Virasoro operator, L_n

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c_v}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \tag{1}$$

が基本的役割をはたす。この Virasoro algebra のみに基づく理論では central charge が $c_v = 1-6/m(m+1)$, $m=3,4,\cdots$ のときに RCFT となることが知られている。その他の c_v に対する RCFT を得るには、Virasoro algebra (1) に適当な generator を付加して対称性を広げる必要がある。拡張された Virasoro algebra は一般に chiral algebra と呼ばれていて、W-algebra などもその中に含まれる。ここで扱う Affine Lie 環も以下に述べる意味で chiral algebra になる。

$\mathfrak{g}$ を有限次元 simple Lie 環とする。θ を higest root, $\langle , \rangle$: $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ を Cartan-Killing form で $\langle\theta,\theta\rangle=2$ と規格化する。$\mathfrak{g}$ の basis $J^a(a=1,\cdots,\dim\mathfrak{g})$ を $\langle J^a, J^b\rangle=\delta^{ab}$ となるようにとり、交換関係を

$$[J^a, J^b] = f^{abc}J^c \tag{2}$$

と書く。構造定数は完全反対称である。

$\mathfrak{g}$ に associate した Affine Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}$ は、J_n^a $(n\in\mathbb{Z})$ 及び center c により生成され、交換関係は次で与えられる。

$$[J_n^a, J_m^b] = f^{abc}J_{n+m}^c + c\,\delta^{ab}n\delta_{n+m,0}\,. \tag{3}$$

J_n^a を Current operator と呼び、(3) を current algebra と呼ぶこともある。J_n^a から自然に Virasoro operator を構成することができる。Sugawara form として知られているもので、次の形で与えられる。

$$L_n = \frac{1}{2(g^*+c)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} {}^{\circ}_{\circ} J_m^a J_{n-m}^a {}^{\circ}_{\circ} \tag{4}$$

ここに g^* は $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter number と呼ばれるもので、$n+1$ (A_n) $n+1$ (C_n), $12, 18, 30$ $(E_{6,7,8})$, 4 (G_2), 9 (F_4), $n-2$ $(SO(n))$ である。

記号 ${}^{\circ}_{\circ}\ {}^{\circ}_{\circ}$ は normal ordering で次のように定義される：

$$ {}^{\circ}_{\circ} J_n^a J_m^b {}^{\circ}_{\circ} = \begin{cases} J_n^a J_m^b & (n<m) \\ \frac{1}{2}(J_n^a J_m^b + J_m^b J_n^a) & (n=m) \\ J_m^b J_n^a & (n>m) \end{cases} . \tag{5}$$

L_n 達は $c_v = \frac{c\dim\mathfrak{g}}{g^*+c}$ の Virasoro algebra (1) に従い、また

$$[L_n, J_m^a] = -m J_{n+m}^a \quad , \tag{6}$$

が成り立つ。(1)(3)(6) が基本的な関係式である。

§3、Integrable representation of $\hat{\mathfrak{g}}$

Virasoro algebra の descrete seriese $c = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$ に対応するような、$\hat{\mathfrak{g}}$ のよい表現を考えよう。Integrable highest weight representation と呼ばれているものがそれで、以下のように与えられる。

無限次元の表現を考えるので、表現空間に filtration を入れて

おくのが便利で、物理的にはエネルギーに相当するoperator L_0の固有値によってfiltrationを入れるのがcannonicalな方法である。L_0とJ_n^aの交換関係から、$\hat{\mathfrak{g}}$を次のように分解する：

$$\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}}_+ \oplus \mathfrak{g} \oplus \hat{\mathfrak{g}}_- \qquad (7)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathfrak{g}}_+ \ni J_n^a \quad (n>0) & \text{annihilation operator（固有値を下げる）} \\ \hat{\mathfrak{g}}_- \ni J_n^a \quad (n<0) & \text{creation operator（固有値を上げる）} \\ \mathfrak{g} \ni J_0^a & \text{zero mode operator（固有値を変えない）} \end{cases}$$

J_0^aは有限次元の$\mathfrak{g}$と同じ交換関係に従うのでこれらを同一視する。

$\hat{\mathfrak{g}}$の<u>level ℓ</u>のintegrable highest weight表現$\mathcal{H}_\lambda$とは次の性質をもつものとして定義される。

1) ground states（最低固有値）の空間$V_\lambda = \{|\phi\rangle \in \mathcal{H}_\lambda \mid \hat{\mathfrak{g}}_+|\phi\rangle = 0\}$はhighest weight λをもつ$\mathfrak{g}$のhighest weight表現，

2) center cは$\ell\, id$として作用（$\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$），

3) $\mathcal{H}_\lambda$はV_λ上$\hat{\mathfrak{g}}_-$で成生され、唯一つのrelation

$$(J_{-1}^{\theta})^{\ell - \langle \theta, \lambda \rangle + 1} |\lambda\rangle = 0, \qquad (8)$$

をもつ。ここに$|\lambda\rangle$はV_λのhighest weight vectorで、J^θはhighest root θに対応するgeneratorである。

重要なことは、このようなintegrable表現を許すλの全体は

$$P_\ell^+ = \{\lambda : \text{highest weight of } \mathfrak{g} \mid 0 \leq \langle \theta, \lambda \rangle \leq \ell\} \qquad (9)$$

で与えられる有限集合となることである。

<u>example</u> $A_1^{(1)}$. level ℓ

許される highest weight は $P_\ell^+ = \{\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots, \frac{\ell}{2}\}$ で $\ell+1$ 個.

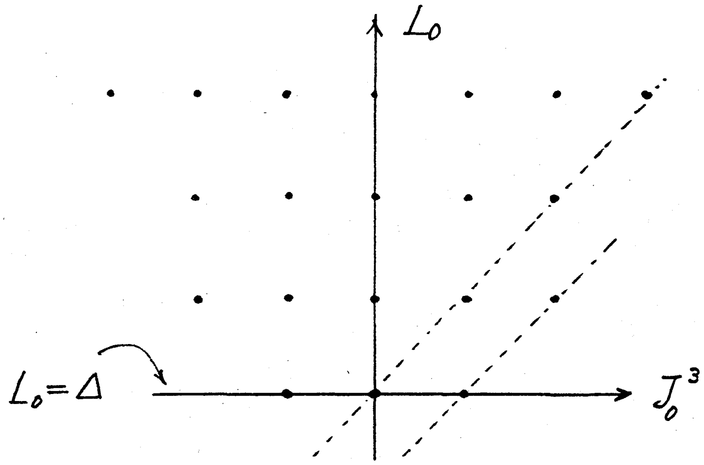
ground states V_λ は spin λ の $SU(2)$-module で $2\lambda+1$ 次元.

highest weight vector $|\lambda\rangle \in V_\lambda \subset \mathcal{H}_\lambda$ は relation

$$\left\{ \begin{array}{l} J_0^3|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \; , \; J_0^+|\lambda\rangle = 0 \; , \\ (J_{-1}^+)^{\ell-2\lambda+1}|\lambda\rangle = 0 \; , \end{array} \right. \tag{10}$$

に従う。($J_n^\pm = J_n^1 \pm i J_n^2$)

次の図は $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現の weight diagram の模式図である。



$\hat{\mathfrak{g}} = A_1^{(1)}$ の場合.

L_0 の固有値は最低固有値 $\Delta_\lambda + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で、Δ_λ は次で与えられる。

$$\Delta_\lambda = \frac{\langle \lambda, \lambda+2\rho \rangle}{g^* + \ell} \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \quad , \; \rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha:\mathrm{pos}} \alpha \quad . \tag{11}$$

$L_0 =$ 一定の各 sub space は $\mathfrak{g}$ の有限次元表現になっている。大切なことは、水平方向ばかりでなく、ななめの方向の $SL(2,\mathbb{C})$-sub module もすべて有限次元である点である。言いかえれば ななめの generator (正確には real roots という) はすべて

locally nilpotent である。このことは integrable 表現を特徴づける重要な性質である。

§3. Field operators

2次元場の理論の立場からは L_n, J_n^a は次のような field operator の Laurent expansion である：

$$\begin{cases} T(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, & L_n=\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{n+1}T(z), \\ J^a(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n^a z^{-n-1}, & J_n^a=\oint\frac{dz}{2\pi i}z^n J_n^a(z). \end{cases} \tag{12}$$

交換関係 (1), (6) は次のように書き直される：

$$\begin{cases} [\,L_n, T(z)\,] = z^n\left(z\frac{d}{dz}+2(n+1)\right)T(z)+\frac{c}{12}(z^{n+1})''', \\ [\,L_n, J^a(z)\,] = z^n\left(z\frac{d}{dz}+(n+1)\right)J_n^a(z). \end{cases} \tag{13}$$

L_n は conformal 変換 $z\mapsto z+\epsilon_n z^{n+1}$ の生成子であったこと、及び、この変換の下での analytic j-form の変換性

$$\psi(z)dz^j\longmapsto \psi(z)dz^j+\epsilon_n z^n\left(z\frac{d}{dz}+j(n+1)\right)\psi(z)dz^j \tag{14}$$

を考慮すれば、$J^a(z)$, $T(z)$ は operator valued analytic 1-form, 2-form (up to anomaly) と見なすべきことがわかる。この意味で $J^a(z)dz$, $T(z)dz^2$ を current 及び energy-momentum tensor と呼ぶ。

さて、上記では勝手に z なる変数を考えそれに対する form などを考えたわけだが、当然この z は適当な Riemann 面の適

当な local coordinate として解釈されるべきである。a priori には operator たちは Riemann面のことを知らないのであるから、そのような幾何学的 data は operand が荷うべきである。次の§で各幾何学的 data に対応して定まる current algebra の表現空間（正しくはその dual）を定義する。

§4. Gauge condition

まず手始めに、$\mathcal{H}_\lambda$ 上での $J^a(z)$ の作用を調べておこう。今、$|\phi\rangle \in V_\lambda$ を grand states からとると、$\mathfrak{g}_+|\phi\rangle = 0$ から

$$J^a(z)|\phi\rangle = \sum_{n\leq 0} J_n^a|\phi\rangle z^{-n-1} \tag{15}$$

を得る。従って $J^a(z)dz$ は $z=0$ に高々1位の極をもつ meromorphic 1-form（の germ）である。もう1回 $J^b(w)$ を作用させると

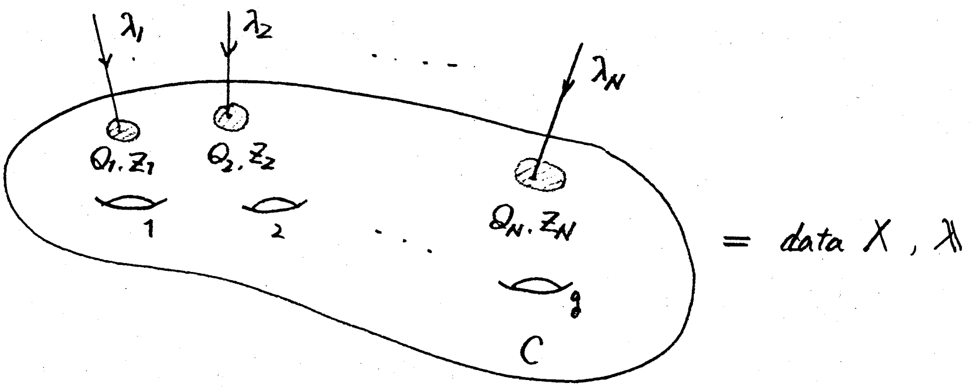
$$\begin{aligned}
J^b(w)J^a(z)|\phi\rangle &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\leq 0} J_m^b J_n^a|\phi\rangle w^{-m-1}z^{-n-1} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\leq 0}\left\{ f^{bac}J^c_{n+m}|\phi\rangle + m\delta_{n+m,0}\,\ell\,\delta^{ab}|\phi\rangle\right\} w^{-m-1}z^{-n-1} \\
&\quad + \sum_{m\leq 0}\sum_{n\leq 0} J_n^a J_m^b|\phi\rangle w^{-m-1}z^{-n-1} \qquad (16)\\
&= \left\{\frac{\ell\,\delta^{ab}}{(w-z)^2} + \frac{f^{bac}}{w-z}J^c(z)\right\}|\phi\rangle + \sum_{n,m\leq 0} J_n^a J_m^b|\phi\rangle w^{-m-1}z^{-n-1},
\end{aligned}$$

を得る。従って $J^b(w)J^a(z)\,dw\,dz$ は $z=0$, $w=0$ に1位の極をもつ他に diagonal $z=w$ に2次までの極をもつ。(16) の関係式は current の <u>operator product expansion</u>

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{\ell\delta^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f^{abc}}{z-w}J^c(w) + \text{regular at } z=w \qquad (17)$$

にまとめられる。これは交換関係(3)と等価である。

さて、N. g を整数として、次のような幾何学的dataを用意する。



$$X = (C, Q_1, \cdots Q_N, z_1, \cdots z_N), \quad \lambda = (\lambda_1, \cdots \lambda_N) \qquad (18)$$

ここに、Cは種数 g のRiemann面(又はstable curve) (Q_i, z_i)はC上の点とその回りのlocal coordinate $(z_i(Q_i)=0)$. $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$はintegrable highest weightsである。今、

$$\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\lambda_N} \qquad (19)$$

とおくと、各成分にはcurrent $J^a(z_i)$ たちが (15)(16) に示したように作用している。f を $H^0(C, \mathcal{O}(*\sum_{i=1}^N Q_i))$ から任意にとり、Q_iのまわりでの展開を $f(z_i)$ と書く*。

$$J^a[f] \equiv \sum_{i=1}^N \operatorname{Res}_{Q_i}(f(z_i) J^a(z_i) dz_i) \qquad (20)$$

は、$\mathcal{H}_\lambda$上に作用し、交換関係

$$[J^a[f], J^b[g]] = f^{abc}J^c[fg] + \ell\delta^{ab}\sum_{i=1}^N \operatorname{Res}_{Q_i}(df\, g) \qquad (21)$$

* 関数形も展開ごとに異なるから $f_i(z_i)$ と書くべきかも知れない。

に従う。留数定理から最後の項は zero になることに注意しよう。このことから $\mathcal{H}_\lambda$ の dual space $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ での方程式

$$\langle \Psi | \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}_{Q_i} \left(f(z_i) J^a(z_i) dz_i \right) = 0 \ , \quad \text{for } {}^\forall f \in H^0(C, \mathcal{O}(*\sum_{i=1}^{N} Q_i)) \ , \qquad (22)$$

が意味をもつ。これを Gauge condition と呼び、その解空間を $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^\dagger(X)$ と書く。$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^\dagger(X)$ は data X に依存して定まる $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}^\dagger$ の subspace である。方程式 (22) は operator valued 1-form $J^a(z)dz$ に対する留数定理と見なせる。

§5. 相関関数, Primary fields

(15) で $\lambda = 0$ の場合、V_0 は 1 次元で、base を $|0\rangle \in V_0$ とすると

$$J^a(z)|0\rangle = \sum_{n<0} J_n^a |0\rangle z^{-n-1}$$

となる。すなわち $J^a(z)dz$ は $|0\rangle$ の上で正則にふるまう。$\lambda \neq 0$ のときに $J^a(z)dz|\phi\rangle$ が $z=0$ で極をもつのは 原点に current の源となる場 $\phi_\lambda(z)$ (V_λ-valued) があって (i.e. $|\phi\rangle = \phi_\lambda(0)|0\rangle$) $J^a(z)$ がこの場を感知したものと考えられる。$J^a(z)$ に極を生み出すべく導入された場 $\phi(z)$ を primary field といい、定義として次の operator product expansion に従う。

$$J^a(z)\phi_\lambda(w) = \frac{t^a}{z-w}\phi_\lambda(w) + \text{regular at } z=w \qquad (23)$$

ここに t^a は V_λ における $J^a = J_0^a$ の表現行列である。

Current と primary field の言葉を用いて §4 の gauge 条件を書き直すことができる。今 data $\mathfrak{X}$, $\vec{\lambda}$ 及び $\phi_i \in V_{\lambda_i}$ $(i=1,\cdots,N)$ を固定して、次のような関数を考える。(相関関数という)

$$\langle J^{a_1}(P_1)\cdots J^{a_M}(P_M)\phi_{\lambda_1}(Q_1)\cdots\phi_{\lambda_N}(Q_N)\rangle_{\mathfrak{X}} \tag{24}$$

これは、各 P_i について C 上の meromorphic 1-form であって、極は (17), (23) で示されたもののみを許すとする。

定理. $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ にわたる相関関数の総体は (primary field に対する integrability の条件の下で) gauge 条件の解 $\langle\Psi| \in \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}$ と一対一に対応する。

証明. (24) を次の公式によって $\phi_i \in \mathcal{H}_{\lambda_i}$ にまで拡張する.

$$\oint \frac{dz_i}{2\pi i} z_i^{n} \langle J^a(z) J^{a_1}(P_1)\cdots J^{a_M}(P_M)\phi_1(Q_1)\cdots\phi_N(Q_N)\rangle$$
$$= \langle J^{a_1}(P_1)\cdots J^{a_M}(P_M)\phi_1(Q_1)\cdots J_n^a\phi_i(Q)\cdots\phi_N(Q_N)\rangle \tag{25}$$

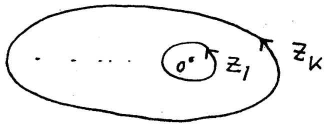
左辺の contur integration が右辺では $\phi_i \in \mathcal{H}_{\lambda_i}$ への J_n^a への作用に読みかえられている。この読みかえが $\hat{\mathfrak{g}}$-module としての $\mathcal{H}_\lambda$ の構造と consistent であることは (17), (23) が保証している。

かくして、(24) から積分をくり返すことにより

$$\langle\Psi| : \mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_N} \to \mathbb{C} \tag{26}$$

が定まる。(注. より正確には、integrability の条件 (8) が (24) の相関関数において満たされていること、すなわち、

$$\oint\frac{dz_K}{2\pi i}\frac{1}{z_K}\cdots\oint\frac{dz_1}{2\pi i}\frac{1}{z_1}\,J^{a}(z_K)\cdots J^{a}(z_1)|\lambda\rangle=0 \qquad (27)$$



が必要である。)

逆に $\langle\Psi|$ から相関関数への対応は期待値

$$\langle\Psi|\ J^{a_1}(z_1)\cdots J^{a_M}(z_M)\ |\phi_1\rangle\otimes\cdots\otimes|\phi_N\rangle \qquad (28)$$

を求めることにより与えられる。∎

§6. $g=0$ の場合

$g=0$ の場合に gauge 条件(22)を解析しよう。$\mathbb{P}^1$ に canonical coordinate z をとり、$Q_1,\cdots,Q_N$ の座標を $a_i=z(Q_i)$，そのまわりでの local coordinate を $z_i=z-a_i$ とする。meromorphic function $f\in H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(*\sum_{i=1}^{N}Q_i))$ として $f(z)=(z-a_i)^{-n}$ をとると

$$\left|\begin{array}{l} f(z_i)=z_i^{-n} \\ f(z_j)=(z_j+(a_j-a_i))^{-n}=(a_j-a_i)^{-n}\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}\left(\frac{z_j}{a_j-a_i}\right)^{r} \\ \qquad (j\neq i) \end{array}\right. \qquad (29)$$

を得る。従って gauge condition は次のようになる.

$$\langle\Psi|\Big\{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{on } i\text{-th component}}}{[J^a_{-n}]}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{on the other components}}}{(\overset{\text{zero mode or}}{\text{annihilation operators}})}\Big\}=0 \qquad (30)$$

この条件をくり返し使えば $\langle\Psi|$ の値は $V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_N}$ 上の

値から unique に定まる。従って 次の結果を得る。

<u>命題</u> $0 \longrightarrow \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_N}, \mathbb{C})$. (31)

ここで $\mathfrak{g}$-invariant part をとっているのは $f=\mathrm{const.}$ に対する gauge 条件を考慮に入れたためである。(31) の image は integrability の条件 (8) (or (27)) に対するややめんどうな議論を要するのでここでは省略する。($N=2$ までは $\ker = 0$)

<u>example</u> $A_1^{(1)}$ の場合.

$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_i\otimes V_j\otimes V_k, \mathbb{C})$ は spin i, j, k が <u>CG 条件</u>

$$|i-j| \le k \le i+j, \quad i+j+k \in \mathbb{Z} \tag{32}$$

をみたすときにのみ 1 次元であとは 0 次元である。これが $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}$ から来るためにはさらに level による制限

$$i+j+k \le l \tag{33}$$

が加わる。(32) (33) を合わせて <u>l-constrained CG 条件</u>と呼ぶ。

§7. <u>有限次元性</u>

我々の最初の基本的結果は次の定理である。

<u>定理</u> $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{X}) < \infty$. (34)

以下に証明の方針を示す。$g=0$ の場合に $\mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_N}$ 上の未知関数が $V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_N}$ 上の関数に帰着してしまったのは、すべての creation operator J_{-n}^a $(n>0)$ が他の点の annihilation op. で書けてしまったからで、その根拠は 1 点にのみ n 位の極を

もつ有理型関数の存在であった。一般の genus では gap の存在のため有限個の creation operator が消えないで残ってしまう。実際 abelian current の場合には、gauge 条件の解は Jacobian 上の多項式の数だけ(無限個)存在する。non-abelian でも $\ell \to \infty$ では事情は同じでやはり解空間は ∞ 次元になる。ところが、level 有限のときは、integrability のため、生き残った creation operator のうち real roots (ななめの generator) はすべて locally nilpotent になり無限次元を与えない。そこで残る問題は imaginary roots (ま上の generator) の挙動である。これについても無限次元が出て来ないことは annihilation ideal (の radical) が bracket で閉じていることを主張する Gabber の定理によって示される。かくして求める有限次元性が示された。

remark　abelian current の理論では、fermion operator (Vertex operator) の一価性を課すと解は唯一つに定まった。non-abelian の場合も free boson で表示できる ADE 型 level 1 の場合には、同様の mechanism で有限次元性を理解することができる。

remark　次元の概算：　生き残る creation operator J^a_{-n} は $a = 1, \cdots, \dim \mathfrak{g}$, $n \in \mathrm{gap}$ (g ケ) で $g \cdot \dim \mathfrak{g}$ 個あり、その各々はおおよそ ℓ 乗すると 0 になると考えられ、従って

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_0^{\dagger} \simeq \ell^{g \cdot \dim \mathfrak{g}} \qquad (N=0 \text{ case}) \qquad (35)$$

を得る。$g \dim \mathfrak{g}$ は flat G-bundle の moduli の次元でもある。

§8. 微分方程式

これまでの議論では、幾何学的 data $X=(C, Q_i, z_i)$ を fix してきたが、これを punctured stable curve の moduli space 上に family で展開することができる。moduli space の各点 X には前§で定義した $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(X)$ がはりついているわけだが、実はこれらの sub-space たちをつなげる integrable connection が入ることがわかる。

この connection の由来は、moduli deformation = Virasoro action という Ward identity にある。Virasoro の作用が moduli の変形をひきおこすことは、abelian current の理論でも見られた様に、conformal field theory に共通の事情である。ここで現われる moduli の変形は compactification divisor D を保つ $\Theta(-\log D)$ の形のものであり、この connection に関して flat という方程式は D に確定特異点をもつ holonomic system になる。

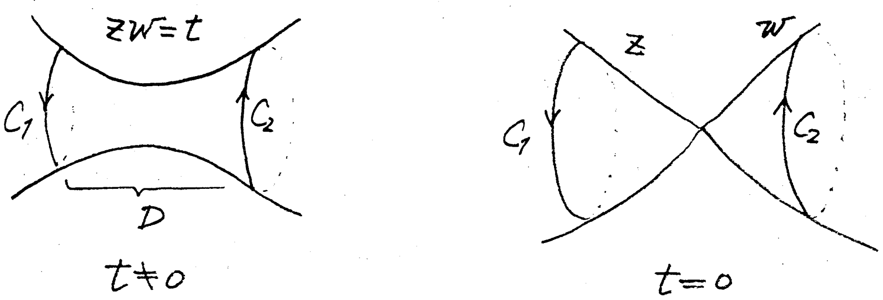
この微分方程式は $\mathcal{D}$-module の言葉を使って定式化されるが詳細は略す。[1]

§9. Factorization properties

connection が入っていることにより、divisor 以外の各 open strata では $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(X)$ は次元一定である。実は divisor まで込めて $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(X)$ は次元一定であり、すなわち moduli space 上の vector bundle をなすことが示される。このことは、gauge 条件，及

び微分方程式のdivisorでのふるまいを調べて得られる.

まず、gauge条件から調べてみる。2つのlocal coordinates z, w を $zw=t$ でつないで得られる1-parameter familyを考える。$t=0$ はdouble point singularityである。



図の領域 D 上で $f(z)=z^n$ ie. $f(w)=\left(\frac{t}{w}\right)^n$ は正則であるから Operator valued form についての Chauchy の定理(=gauge 条件と等価)によって

$$\int_{C_1}\frac{dz}{2\pi i}z^n J^a(z)+\int_{C_2}\frac{dw}{2\pi i}\left(\frac{t}{w}\right)^n J^a(w)=0\ , \tag{36}$$

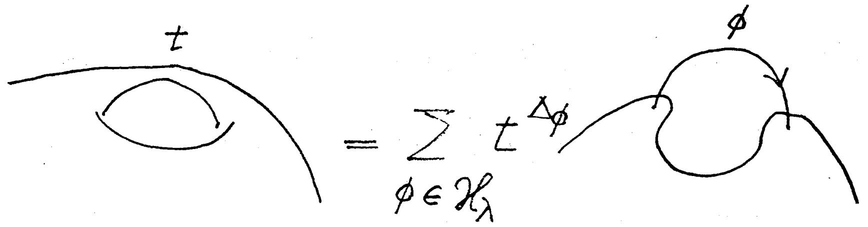
$$\therefore\quad [J_n^a]_{C_1}+t^n[J_{-n}^a]_{C_2}=0\ ,$$

を得る。$t\to 0$ の limit では

$$\begin{cases} [J_n^a]_{C_1}=[J_n^a]_{C_2}=0\ ,\quad n>0\ ,\\ [J_0^a]_{C_1}+[J_0^a]_{C_2}=0\ , \end{cases} \tag{37}$$

となり、各double pointには primary field が現われ、それらは互いにdualな表現に属することがわかる。このprimary fieldを中間状態と呼ぶ。この中間状態もまたintegrableな表現に属すということは自明ではないが示すことができる。

逆に $t=0$ での任意の解をふくらませて、$t\neq 0$ の微分方程式の解を形式的に次のようにつくることができる。



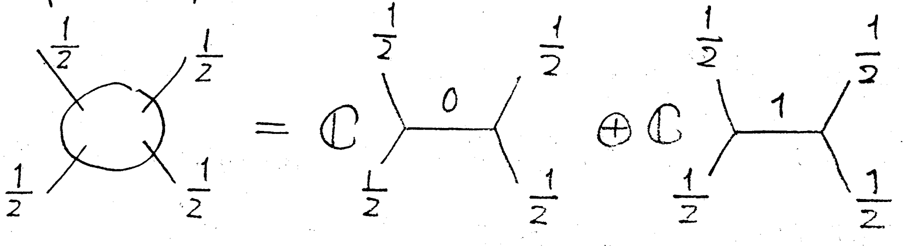
(38)

和は ground state 以外も含めたすべての中間状態 $\phi \in \mathcal{H}_\lambda$ にわたってとる。(38)の関係式は factorization 又は sewing operation として物理で知られているものであるが、我々の立場では微分方程式の形式解を与えるものであり、確定特異点型の一般論によりその収束性が示される。

§10. monodromy

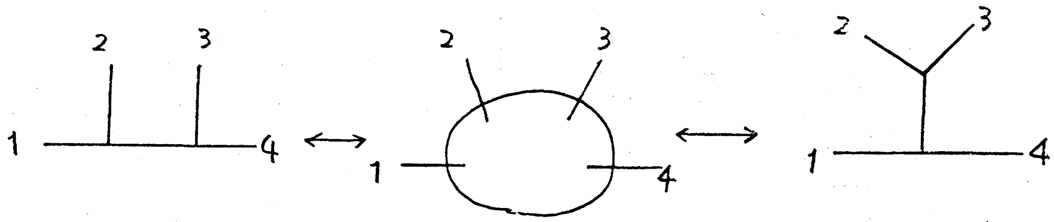
Factorization の性質によって、最も縮退した状況へ持って行くことにより canonical な解の basis をとることができる。これらの basis は中間状態を飛ぶ可能な表現たち(及び3点関数に多重度がある場合はそれを指定する index)によって label される。

example $A_1^{(1)}$. level l.



(39)

最も縮退した stable curve は $3g-3+N$ 個の node と $2g-2+N$ 個の component ($\mathbb{P}^1$-3点) をもつ。これらは φ^3-diagram と呼ばれるものと一対一に対応する．異なる diagram は異なる basis を与えるが、これらは同一の微分方程式の解空間を張るので互いに monodromy 行列でむすばれている。例えば、次のような monodromy は基本的である。(fusion と呼ばれる)



(40)

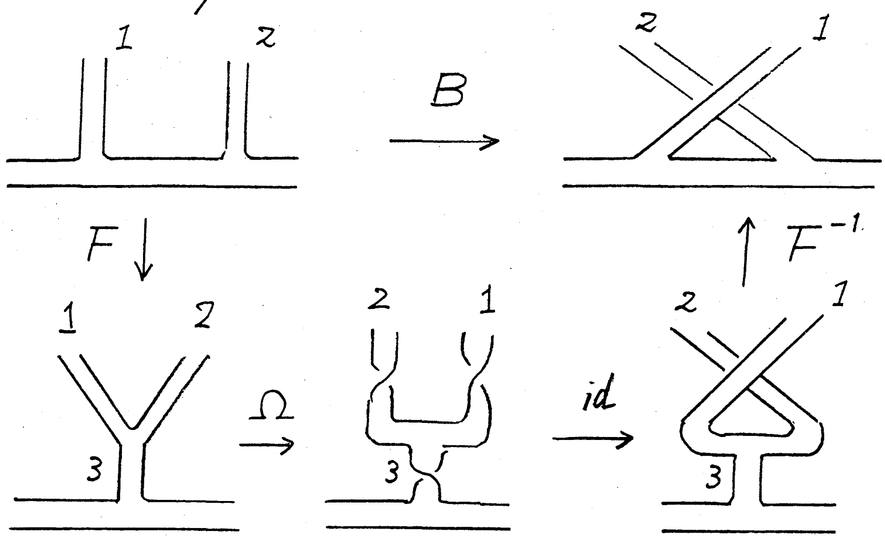
最近 Moore-Seiberg はこれらの monodromy に対する生成元と基本関係式を書き下した。それらは、braid群や modular群なども含んだ興味深いものである。上記のような monodromy のなす algebra を先に考えて、その表現論として conformal field theory を見直そうというのが Friedan-Shenker の modular geometry の考えである。この時、重要な問題は、

問題　すべての modular geometry は何らかの conformal field theory の monodromy として得られるか？

ということである。このあたりの話は全く open Question で今後の検討が待たれるところである．

最後に braid群の monodromy 表現に関して少し述べておく。marked point の位置を入れかえる操作は braid群の monodromy 表

現を与える。今これを(40)の操作でbaseを変えて見ると、そこではmonodromyが対角化されていることがわかる(次図)。



ここにΩはdiagonal phaseで、次の式で与えられる。

$$\Omega = \pm \exp \pi i \{ \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2 \}. \tag{41}$$

一般に、vanishing cycleのまわりのmonodromyは、そこを通っている中間状態のconformal weight Δ から同様に求めることができる。

文献

[1] Tsuchiya and Yamada "Conformal Field Theory on Moduli Family of Stable Curves with Gauge Symmetry."